

1.	Nazwa kierunku	matematyka
2.	Wydział	Wydział Nauk Ścisłych i Technicznych
3.	Cykl rozpoczęcia	2025/2026 (semestr zimowy)
4.	Poziom kształcenia	studia pierwszego stopnia
5.	Profil kształcenia	ogólnoakademicki
6.	Forma prowadzenia studiów	stacjonarna

7.	Informacje podstawowe o module	
Nazwa modułu		Rachunek prawdopodobieństwa A
Kod modułu		W4-MT-S1-25-RPrA
Liczba punktów ECTS		5
Język wykładowy		polski
Cel i opis treści kształcenia		Moduł „Rachunek prawdopodobieństwa A” ma na celu rozwijanie i pogłębianie umiejętności swobodnego posługiwania się pojęciami oraz narzędziami teorii prawdopodobieństwa, zdobytymi w ramach modułu „Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa A”. Przewiduje się realizację następujących treści programowych: 1. Kowariancja pary zmiennych losowych i macierz kowariancji wektora losowego. 2. Wielowymiarowy rozkład normalny. 3. Funkcja charakterystyczna - przypomnienie i pogłębienie zdobytej wiedzy. 4. Różne rodzaje zbieżności zmiennych losowych i zależności między nimi. 5. Związek między zbieżnością wg. rozkładu i z punktową zbieżnością funkcji charakterystycznych. 6. Centralne twierdzenie graniczne. 7. Prawa wielkich liczb. 8. Warunkowa wartość oczekiwana. 9. Martynały z czasem dyskretnym. 10. Dyskretny łańcuchy Markowa.
Lista modułów koniecznych do zaliczenia przed przystąpieniem do tego modułu (o ile to konieczne)		[W4-MT-S1-25-WRPrA] Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa A

8.	Zakładane efekty uczenia się modułu			
Kod	Opis	Efekty uczenia się kierunku	Stopień realizacji (skala 1-5)	
RPraA_01	Zna pojęcie kowariancji pary zmiennych losowych oraz macierzy kowariancji wektora losowego i jej najważniejsze własności. Rozumie różnicę między niezależnością i brakiem korelacji zmiennych losowych.	K_W04	4	
RPraA_02	Potrafi wyznaczyć macierz kowariancji wektora losowego o zadanym rozkładzie (ciągłym lub dyskretnym) oraz znaleźć macierz kowariancji jego dowolnego przekształcenia liniowego.	K_U03	3	
		K_U04	3	
		K_U11	5	
RPraA_03	Zna pojęcie wielowymiarowego rozkładu normalnego oraz postać jego gęstości. Wie, jak wyznaczyć wektor wartości	K_W01	1	

	oczekiwanych i macierz kowariancji rozkładu normalnego o zadanej gęstości, jak również gęstość takiego rozkładu na podstawie znajomości tych parametrów.	K_W04	4
RPraA_04	Zna definicje różnych rodzajów zbieżności zmiennych losowych oraz implikacje między nimi, ponadto zna przykłady ilustrujące brak implikacji w określonym kierunku.	K_W04 K_W05	4 5
RPraA_05	Zna centralne twierdzenie granicznego Lindeberga-Levy'ego (dla ciągu niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie) i najważniejsze kryteria gwarantujące spełnienie mocnego i słabego prawa wielkich liczb. Ma właściwe intuicje co do tych twierdzeń i rozumie ich w znacznym stopniu w statystyce.	K_W01 K_W03 K_W04	2 4 4
RPraA_06	Potrafi stosować centralne twierdzenie graniczne do wyznaczania przybliżonych prawdopodobieństw zdarzeń opisanych przez sumy niezależnych zmiennych losowych. W określonych przypadkach potrafi wykazać, że dany ciąg zmiennych losowych spełnia mocne / słabe prawo wielkich liczb, bądź udowodnić, że prawo to nie zachodzi.	K_U01 K_U03 K_U09 K_U11	4 3 3 5
RPraA_07	Wie i rozumie czym jest warunkowa wartość oczekiwana zmiennej losowej względem σ -ciała (w szczególności generowanego przez wektor losowy), jak również zna jej własności. Wie, jak sformułować uogólnioną definicję prawdopodobieństwa warunkowego i warunkowego rozkładu zmiennej losowej (względem wektora losowego).	K_W01 K_W02 K_W04	1 2 4
RPraA_08	Potrafi wyznaczyć warunkową wartość oczekiwaną $E[f(X,Y) Y]$ dla danego wektora losowego (X,Y) o rozkładzie ciągłym lub dyskretnym, jak również wyznaczyć wartość oczekiwaną zmiennej $f(X)$ przy danym rozkładzie warunkowym zmiennej X .	K_U03 K_U09 K_U11	3 3 5
RPraA_09	Zna pojęcia filtracji przestrzeni probabilistycznej, momentu stopu, martyngału, podmartyngału oraz nadmartyngału (z czasem dyskretnym), rozumie intuicje stojące za tym pojęciami oraz potrafi wskazać ilustrujące je przykłady. Ponadto, zna wybrane twierdzenia dotyczące (pod/nad)martyngałów.	K_W04 K_W05	4 3
RPraA_10	Potrafi zbadać, czy (lub dla jakich wartości parametrów) dany ciąg zmiennych losowych jest (pod/nad) martyngałem względem zadanej filtracji.	K_U01 K_U09 K_U11	2 4 5
RPraA_11	Zna pojęcie jednorodnego (w czasie) łańcucha Markowa, jego rozkładu początkowego, macierzy przejścia oraz jej najważniejsze własności, jak również twierdzenie o istnieniu łańcucha Markowa o zadanych charakterystykach. Wie, jak klasyfikuje się stany łańcucha Markowa ze względu na charakter komunikacji między nimi, szanse i okresy powrotu do poszczególnych stanów oraz zna najważniejsze kryteria pozwalające na dokonanie tej klasyfikacji. Wie, czym jest rozkład stacjonarny łańcucha Markowa oraz zna twierdzenie ergodyczne dla nieprzywiedlnych i nieokresowych łańcuchów Markowa o skończonej przestrzeni stanów.	K_W01 K_W02 K_W03 K_W04	2 3 3 5
RPraA_12	Potrafi wskazać reprezentatywne przykłady jednorodnych łańcuchów Markowa oraz sprawdzić, czy dany ciąg zmiennych losowych ma własność Markowa. W wybranych modelach potrafi dokonać klasyfikacji stanów (ze względu na komunikację między nimi oraz szanse i okresy powrotu do poszczególnych stanów), wskazać klasy zamknięte, zbadać ich nieprzywiedlność oraz wyznaczyć rozkład stacjonarny łańcucha.	K_U01 K_U04 K_U09 K_U11	3 3 3 5
RPraA_13	Potrafi użyć formalizmu matematycznego do budowy i analizy modeli probabilistycznych w innych dziedzinach nauk.	K_U01 K_U02	3 2
RPraA_14	Potrafi w sposób zrozumiały, w mowie i piśmie, przedstawiać poprawne rozumowania matematyczne oraz formułować	K_U01	5

	twierdzenia i definicje z zakresu teorii prawdopodobieństwa.	K_U02	2
		K_U13	2

9. Metody prowadzenia zajęć		
Kod	Kategoria	Nazwa (opis)
a01	Zbiór metod asymilacji wiedzy / podających	Wykład informacyjny/kursowy systematyczny kurs z określonej dyscypliny naukowej w ujęciu syntetycznym; realizacja zakłada bierny odbiór przekazanych informacji
a05	Zbiór metod asymilacji wiedzy / podających	Objaśnienie/wyjaśnienie eksplikacja polegająca na wyprowadzeniu uznanego z góry twierdzenia z innych, wcześniej już znanych, w określonej przez osobę prowadzącą zajęcia liczbie kroków
b02	Zbiór metod problemowych	Wykład konwersatoryjny przekaz treści uwzględniający interakcję ze słuchaczami wykładu; dyskusja związana z wykładem stanowi jeden z jego elementów bądź jest jego kontynuacją
b04	Zbiór metod problemowych	Metody aktywizujące: dyskusja/debata wymiana poglądów z użyciem merytorycznych argumentów, w wyniku której dochodzi do ścierania się różnych poglądów, wypracowania kompromisów i określania wspólnych stanowisk; dyskusja prowadzona jest w oparciu o reguły wcześniej ustalone z grupą: w tym dotyczące czasu, sposobu i kolejności prezentacji stanowisk oraz zasad kulturalnej dyskusji; dyskusja służy poszukiwaniu najlepszych rozwiązań, prezentowaniu różnych punktów widzenia, nie jest rywalizacją; odmiany d.: burza mózgów, debata oksfordzka, dyskusja panelowa, drzewo decyzyjne, dyskusja konferencyjna; debata to uporządkowany spór pomiędzy zwolennikami i przeciwnikami jakiegoś poglądu, toczona zwykle przez specjalistów z dziedziny lub wybranych uprzednio przedstawicieli grupy zajmującej się wspólnym problemem
d02	Zbiór metod programowanych	Praca z podręcznikiem programowym praca z wykorzystaniem podręcznika zawierającego strukturę obejmującą część lub całość programu nauczania modułu z określoną formułą studiowania treści; w tym praca z podręcznikiem przedmiotowym, atlasem, katalogiem, zbiorom zadań, itp.
e01	Zbiór metod praktycznych	Ćwiczenie laboratoryjne/doświadczenie [w tym, w terenie] metoda praktycznego stosowania wiedzy; realizowana w trzech fazach: dostrzeżenie problemu wywołanego treścią zadania, sformułowanie problemu i próba samodzielnego rozwiązania z oceną skutków; celem jest zdobycie umiejętności, sprawności i nawyków oraz utrwalenie posiadanych wiadomości, tak aby wiedza stała się wiedzą operatywną; metoda laboratoryjna zakłada większą niż przeprowadzenie doświadczenia samodzielność uczących się
f02	Metody samodzielnego uczenia się	Indywidualna praca z tekstem poszukiwanie i zdobywanie nowych wiadomości z wykorzystaniem podręczników i innych źródeł pisanych (w tym w wersji cyfrowej); wyszukiwanie tekstów, dobór fragmentów do analizy/interpretacji, wykorzystanie innych tekstów do rozwiązania problemu w ramach studiowanego zagadnienia

10. Formy prowadzonych zajęć					
Kod	Nazwa	Liczba godzin	Sposób weryfikacji efektów uczenia się	Efekty uczenia się modułu	Metody prowadzenia zajęć
RPraA_fs_1	wykład	30	egzamin	RPraA_01, RPrAA_04, RPrAA_05, RPrAA_06, RPrAA_07, RPrAA_09, RPrAA_10, RPrAA_11, RPrAA_12, RPrAA_13, RPrAA_14	a01, a05, b02, b04
RPraA_fs_2	konwersatorium	30	zaliczenie	RPraA_01, RPrAA_02,	a05, b04, d02, e01, f02

				RPraA_03, RPrA_04, RPraA_05, RPrA_06, RPraA_07, RPrA_08, RPraA_09, RPrA_10, RPraA_11, RPrA_12, RPraA_13, RPrA_14	
--	--	--	--	---	--

11. Praca studenta poza udziałem w zajęciach obejmuje w szczególności:				
Kod	Kategoria	Nazwa (opis)	Czy częściowo zalicza się do BUNA-y?	
a01	Przygotowanie do zajęć	Kwerenda materiałów i przegląd działań niezbędnych do uczestnictwa w zajęciach <i>przegląd literatury, dokumentacji, narzędzi i materiałów oraz specyfiki i zakresu działań wskazanych w sylabusie jako wymagane do pełnego uczestnictwa w zajęciach</i>	Tak	
a02	Przygotowanie do zajęć	Czytanie literatury / analiza materiałów źródłowych <i>czytanie literatury wskazanej w sylabusie; przegląd, porządkowanie, analiza i wybór materiałów źródłowych do wykorzystania w ramach zajęć</i>	Nie	
a03	Przygotowanie do zajęć	Ćwiczenie praktycznych umiejętności <i>czynności polegające na powtarzaniu, doskonaleniu i utrwalaniu praktycznych umiejętności, w tym ćwiczonych podczas odbytych wcześniej zajęć lub nowych, niezbędnych z punktu widzenia realizacji kolejnych elementów programu (jako przygotowanie się uczestnictwa w zajęciach)</i>	Nie	
a04	Przygotowanie do zajęć	Konsultowanie materiałów uzupełniających [względem wskazanych w sylabusie] <i>uzgadnianie dodatkowych do wskazanych w sylabusie materiałów, służących realizacji zadań wynikających z uczestnictwa w zajęciach lub na potrzeby przygotowania się do nich</i>	Tak	
b01	Konsultowanie programu i organizacji zajęć	Zapoznanie się z zapisami sylabusu <i>przeglądanie zawartości sylabusu i zapoznanie się z treścią jego zapisów</i>	Tak	
b02	Konsultowanie programu i organizacji zajęć	Weryfikacja/dostosowanie/dyskutowanie zapisów w sylabusie <i>konsultowanie treści sylabusu z potencjalną weryfikacją zapisów wymagających spełnienia specjalnych warunków uczestnictwa w zajęciach, np. wymagań technicznych, czasowych, przestrzennych, innych, w tym warunków uczestnictwa w zajęciach poza murami uczelni, zajęć organizowanych w blokach, organizowanych online, itp.; konsultowanie z potencjalnym udziałem opiekuna roku lub członkami grupy zajęciowej</i>	Tak	
c01	Przygotowanie do weryfikacji efektów uczenia się	Ustalanie etapów realizacji zadań przyczyniających się do weryfikacji efektów uczenia się <i>przygotowanie strategii realizacji zadania uwzględniającej podział treści, czynności i ich zakres, czas realizacji oraz/lub sposób pozyskania niezbędnych do jego wykonania materiałów i narzędzi, itp.</i>	Tak	
c02	Przygotowanie do weryfikacji efektów uczenia się	Studiowanie wykorzystanej literatury oraz wytworzonych w ramach zajęć materiałów <i>wgłębianie się, dociekanie, rozważanie, przyswajanie, interpretacja lub porządkowanie wiedzy pochodzącej z literatury, dokumentacji, instrukcji, scenariuszy, itd., wykorzystanych na zajęciach oraz z notatek lub innych materiałów/wytworów sporządzonych w ich trakcie</i>	Nie	
d01	Konsultowanie wyników weryfikacji efektów uczenia się	Analiza korekt/informacji zwrotnej ze strony NA dotyczących wyników wer. ef. ucz. <i>przegląd uwag, ocen i opinii sporządzonych przez NA odnoszących się do realizacji zadania sprawdzającego poziom osiągniętych efektów uczenia się</i>	Nie	
d02	Konsultowanie wyników weryfikacji efektów uczenia się	Opracowanie planu korekty i zadań uzupełniających/korygujących <i>przegląd i wybór zadań oraz czynności pozwalających na eliminację wskazanych przez NA błędów, ich weryfikację lub poprawę oraz zaliczenie zadania na, co najmniej, najniższym dopuszczalnym poziomie</i>	Tak	

Informacje dotyczące szczegółów realizacji modułu w danym roku akademickim znajdują się w sylabusie dostępnym w systemie USOS: <https://usosweb.us.edu.pl>.